Calcul en binaire avec des portes logiques

1 - Base 10 - Base 2

<u>En base dix</u>, on représente un nombre à l'aide de dix symboles :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Un nombre de 4 chiffres s'écrit :

n3 n2 n1 n0

où n0 représente le chiffre des unités (10^0 = un), n1 le chiffre des dizaines (10^1 = dix), n2 le chiffre des centaines (10^2 = cent), n3 le chiffre des milliers (10^3 = mille), etc.

Par exemple, le nombre :

cinq mille huit cent quarante trois

s'écrit 5843 en base dix, soit n0 = 3 (trois unités), n1=4 (quatre dizaines), n2 = 8 (huit centaines), n3 = 5 (cinq milliers).

<u>En base deux</u>, on représente un nombre à l'aide de 2 symboles :

0 1

Un nombre de 4 chiffres s'écrit de la même façon :

n3 n2 n1 n0

où n0 représente le chiffre des unités (2^0 = un), n1 le chiffre des deuzaines (2^1 = deux), n2 le chiffre des quatraines (2^2 = quatre), n3 le chiffre des huitaines (2^3 =huit), etc.

Par exemple, le nombre écrit en base deux:

1011

correspond à n0=1 (une unité), n1=1 (une deuzaine), n2=0 (zéro quatraine) et n3=1 (une huitaine). Sa valeur est donc : un + deux + huit = onze.

La base deux présente un intérêt pour réaliser un calculateur électronique du fait de la simplicité des circuits : 1 = tension positive, 0 = tension nulle. D'autre part, les circuits logiques ont des entrées et des sorties à deux niveaux : vrai / faux ou 1 / 0.

On peut écrire n'importe quel nombre entier habituel en base deux. Par exemple, l'écriture en base deux de cinq mille huit cent quarante trois est obtenue par des divisions successives par les puissances de deux (qui reviennent en fait à des soustractions).

puissance de deux	2^{12}	2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Valeur (écrite en base dix)	4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

Le calcul est écrit en base dix :

5843 = 1 . 4096 + 1747 --> 1
1747 = 0 . 2048 + 1747 --> 0
1747 = 1 . 1024 + 723 --> 1
723 = 1 . 512 + 211 --> 1
211 = 1 . 128 + 83 --> 1
83 = 1 . 64 + 19 --> 1
19 = 0 . 32 + 19 --> 0
19 = 1 . 16 + 3 --> 1
3 = 0 . 8 + 3 --> 0
3 = 0 . 4 + 3 --> 0
3 = 1 . 2 + 1 --> 1
1 = 1 . 1 + 0 --> 1

On en déduit l'écriture de 5843 en base deux :

puissance de deux	2^{12}	2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Valeur (écrite en base dix)	4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
5843	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1

Cinq mille huit cent quarante trois = 1011011010011 en base deux. Il faut douze chiffres binaires pour écrire ce nombre, mais la performance actuelle des circuits électroniques rend plus rapide une conversion vers un nombre en base deux par un composant dédié, un calcul en base deux (addition ou multiplication), et finalement une conversion vers la base dix pour l'affichage du résultat obtenu précédemment en base deux.

2 - Addition de 2 nombres binaires

a - Addition de 2 nombres à 1 chiffre (demi-additionneur)

Il y a 4 cas possibles :

0	0	1	1
+ 0	+ 1	+ 0	+ 1
0 0	0 1	0 1	1 0

puisque "un + un = deux" noté 10 en base deux (une deuzaine et zéro unité).

Ceci se résume à :

$$\begin{array}{r} a0 \\ +\ \underline{\ b0} \\ r0\ s0 \end{array}$$

où a0 et b0 sont les 2 chiffres binaires à additionner, s0 le chiffre des unités de la somme et r0 l'éventuelle retenue.

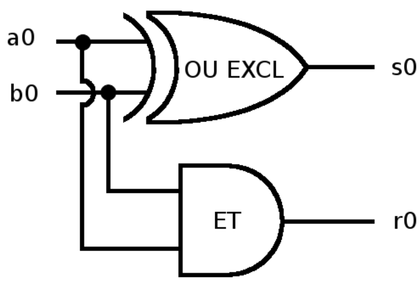
On voit que :

s0 = a0 OU EXCLUSIF b0 c'est à dire : (a0 OU b0) ET (NON(a0 ET b0))
r0 = a0 ET b0

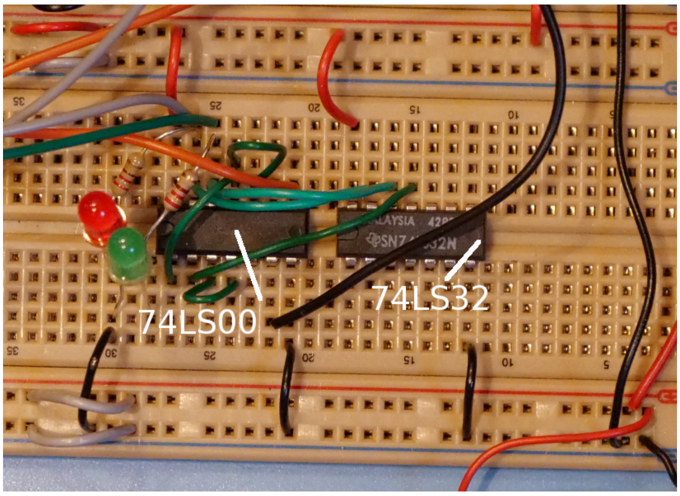
avec les tables de vérité :

a0	b0	r0 = a0 ET b0	s0 = a0 OU EXCL b0
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Le circuit électronique qui correspond est le suivant (demi-additionneur):



Le circuit intégré 74LS86 contient 4 portes OU EXCLUSIF à 2 entrées chacune. Le circuit 74LS08 contient 4 portes ET à 2 entrées. Pour des questions pratiques, il est possible de réaliser la fonction ET avec 2 portes NON ET du circuit 74LS00 qui se suivent et réaliser la fonction OU EXCLUSIF avec le circuit 74LS32 (4 portes OU) et des portes NON ET (photo suivante).



Les 2 LEDS rouge et verte indiquent le niveau logique des deux entrées a0 et b0.

b - Addition de 2 nombres à 1 chiffre plus une retenue (additionneur)

Il y a 8 cas possibles pour la colonne d'indice i:

retenue :	0	0	0	0	1	1	1	1
ai :	0	0	1	1	0	0	1	1
bi :	+ 0	+ 1	+ 0	+ 1	+ 0	+ 1	+ 0	+ 1
résultat :	0 0	0 1	0 1	1 0	0 1	1 0	1 0	1 1

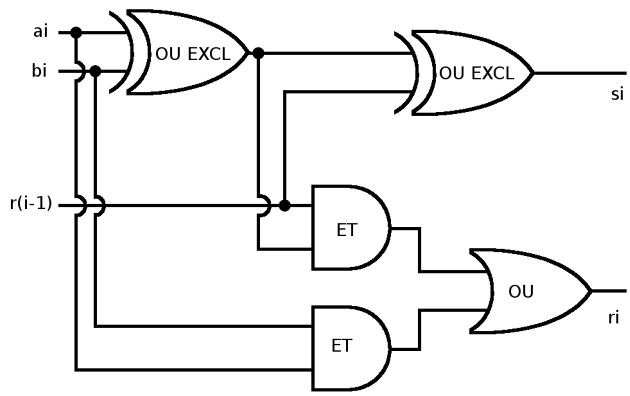
puisque "un + un + un = trois", noté 11 en base 2 (une deuzaine plus une unité).

Ceci se résume à :

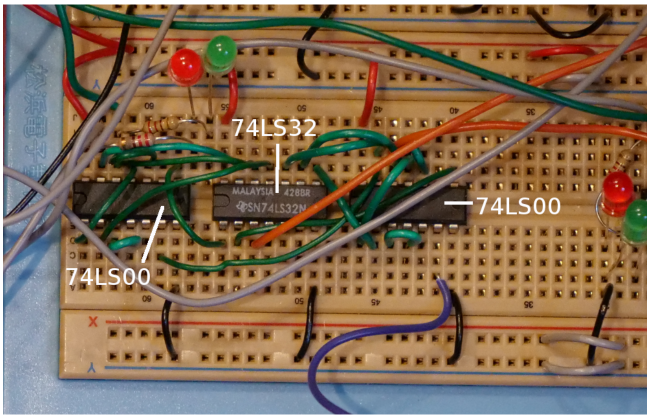
r(i-1)
\+ ai
\+ bi
ri si

où ai et bi sont les 2 chiffres binaires à additionner, r(i-1) la retenue venant de la colonne précédente, si le chiffre de rang i (i>0) de la somme calculée et ri l'éventuelle retenue vers la colonne suivante.

Le circuit électronique qui réalise ces fonctions est le suivant :



Ce circuit peut être réalisé avec 2 circuits intégrés 74LS00 (2 fois 4 portes NON ET) et un circuit intégré 74LS32 (4 portes OU), comme sur la photo.



On peut dupliquer cet additionneur autant de fois qu'il y a de chiffres binaires à additionner, moins 1 qui est un demi-additionneur pour le chiffre des unités. Les LEDs rouge et verte indiquent le niveau des entrées ai et bi. La retenue r(i-1) provient de l'additionneur précédent. La maquette en a 3 + 1.

La conversion entre les 4 chiffres binaires (entrés avec 2 fois 4 interrupteurs) et l'alimentation des 7 segments de l'afficheur est réalisée, pour les 2 nombres à additionner et pour le résultat, par 3 circuits intégrés 74LS247 dédiés.