

Exercice 5

Fractions de fractions

Simplifications

1 - Exemple

On considère la fraction suivante :

$$A = \frac{\frac{\frac{1}{2}}{3}}{\frac{4}{5}}$$

On note que les traits de fraction n'ont pas la même longueur : la fraction principale, au niveau du signe = , est la plus longue. C'est elle qui est calculée en dernier, une fois que son numérateur :

$$\frac{\frac{1}{2}}{3}$$

et son dénominateur :

$$\frac{4}{5}$$

ont été évalués.

Le numérateur est lui-même une fraction de fraction. On effectue en dernier le calcul de la grande fraction et on évalue d'abord la petite fraction :

$$\frac{1}{2} = 0,5$$

Donc

$$\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{0,5}{3} = 0,1666\bar{6} \dots$$

Comme :

$$\frac{4}{5} = 0,8$$

on a finalement :

$$A = \frac{\frac{\frac{1}{2}}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{0,16666\dots}{0,8} = 0,2083333\dots$$

Il y a 2 méthodes pour calculer une fraction de fraction.

1 - Evaluation purement numérique.

- On part des petites fractions.
- On calcule la valeur décimale de la (ou des) plus petite(s) fraction(s).
- De proche en proche, on calcule la valeur décimale de fractions ayant des traits de plus en plus grands.
- On finit par calculer la valeur décimale de la fraction ayant le plus grand trait. Ce trait reste au niveau du signe = à toutes les étapes du calcul.

Sur l'exemple ci-dessus, on obtient successivement :

$$A = \frac{\frac{\frac{1}{2}}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{0,5}{3}}{0,8} = \frac{0,16666\dots}{0,8} = 0,2083333\dots$$

La séquence d'un ou plusieurs chiffres soulignés et suivis de 3 points de suspension se répète infiniment et l'égalité avec les fractions est exacte dans ce cas.

2 - Simplification sous forme d'un produit de fractions simples, suivie de la mise sous forme d'une unique fraction, et suivie enfin du calcul de sa valeur décimale.

- On simplifie en partant de la fraction ayant le plus grand trait.
- On remplace l'opération de division qui correspond à cette fraction par une multiplication de son numérateur par l'inverse de son dénominateur.
- On calcule cet inverse en utilisant :

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

L'inverse d'une fraction est obtenu en échangeant son numérateur et son dénominateur.

Sur l'exemple ci-dessus, on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\frac{\frac{1}{2}}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{1}{2}}{3} \times \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{1}{2}}{3} \times \frac{5}{4} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{1 \times 1 \times 5}{2 \times 3 \times 4} = \frac{5}{24} \\
 &= 0,208333\dots
 \end{aligned}$$

3 - Vérification

On doit trouver la même valeur décimale avec la méthode 1 et avec la méthode 2, ici :

$$A = 0,2083333\dots$$

2 - Applications

Pour chacune des fractions ci-dessous B, C, D, E, F, G, H, I, J, K et L, effectuer l'évaluation purement numérique de la fraction (méthode 1 du paragraphe précédent), puis simplifier sous forme d'un produit de fractions simples puis d'une seule fraction simple (méthode 2) et effectuer la vérification de l'égalité des fractions ainsi obtenues avec les 2 méthodes.

Y a-t-il des fractions de fractions égales parmi les 11 fractions proposées ?

$$B = \frac{\frac{\frac{1}{2}}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{1}{2}}{3} \times \frac{5}{4}$$

$$C = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}$$

$$D = \frac{1}{\frac{2}{\frac{3}{4}} \times \frac{5}{6}}$$

$$E = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}}$$

$$F = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}}$$

$$G = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}}$$

$$H = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}}$$

$$I = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}}$$

$$J = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}}$$

$$K = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}}$$

$$L = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}}$$

Bonus : Comment déterminer de façon systématique toutes les fractions de fractions qui peuvent être écrites avec les 6 nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 ? Ecrire les fractions qui n'ont pas été écrites ci-dessus et faire le même travail avec elles.