

Cycle des quintes

Gammes et Tempéraments

Accord des instruments

Module HTML RTF 06-UT

1 - Introduction

La gamme, dans la musique occidentale, est la division de l'octave en 12 demi-tons : DO3, DO#3, RE3, RE#3, MI3, FA3, FA#3, SOL3, SOL#3, LA3, LA#3, SI3, DO4 (les chiffres 3 et 4 précisent à quelle octave ces notes appartiennent : 1 = octave grave, ..., 6 = octave très aiguë). L'octave est l'intervalle entre 2 DO consécutifs et correspond à un doublement de fréquence.

L'idée la plus simple est de diviser l'octave DO3 - DO4 en 12 demi-tons égaux. Le rapport des fréquences pour un demi-ton est donc tel que, répercuté 12 fois entre les 12 demi-tons de la gamme, on obtienne le rapport 2 entre DO3 et DO4. Le rapport des fréquences entre 2 notes séparées d'un demi-ton est donc $\sqrt[12]{2} = 1,059463094$ (racine 12^{ème} de 2). En effet :

$$\sqrt[12]{2} \times \sqrt[12]{2} \times \sqrt[12]{2} \times \dots \times \sqrt[12]{2} = (\sqrt[12]{2})^{12} = 2$$

D'autres choix de division de l'octave peuvent être utilisés : on parle alors de **tempérament inégal**. La division en 12 demi-tons égaux correspond au **tempérament égal**.

Remarque : la question des tempéraments se pose principalement pour les instruments à clavier, dont l'accord est fait une fois pour toutes avant l'exécution d'un morceau. Un chanteur, un violoniste ou un trompettiste peut corriger la justesse à tout moment. Ces musiciens utilisent rarement le tempérament égal. A deux moments d'un morceau, ils utiliseront spontanément des intervalles musicaux différents du point de vue de leur justesse : on pourrait donc les qualifier de "multi-tempéraments".

2 - Utilisation du module HTML RTF 06-UT

Le module RTF 06-UT permet de réaliser simplement et d'écouter la couleur musicale de tous les tempéraments. Il permet une approche de physicien avec des valeurs numériques ou une approche d'accordeur d'instrument et de musicien, basée sur l'oreille et le cycle des quintes.

Cliquer sur le lien http://www.tuclic.fr/exec/temperaments_04_firefox.htm (ou taper sous Google les mots clefs : "tuclic tempéraments"). Le module RTF 06-UT nécessite une version récente de Firefox.

Pour jouer les notes, on peut utiliser le clavier jaune sur l'écran avec la souris, ou utiliser un clavier MIDI externe et pouvoir jouer un morceau de musique dans le tempérament réalisé. Le plugin <https://jazz-soft.net> est nécessaire pour disposer des fonctions MIDI.

Lors du lancement du module RTF 06-UT, il est tout de suite possible de jouer des accords. On entend un son riche en harmoniques, pour mieux mettre en évidence le caractère de chaque tempérament. On peut éventuellement changer le son dont on peut définir le spectre par ses harmoniques : amplitude et phase (voir "[tuclic RDM 55-XS](#)").

Le module RTF 06-UT comprend deux grandes sections.

A - A gauche : accord des notes individuellement par centièmes de demi-ton, par un curseur, par la fréquence de la note en Hertz ou par le rapport entre la fréquence de la note et la fréquence du DO grave.

Remarque 1 : la fréquence relative du DO grave par rapport à lui-même est toujours 1.

Remarque 2 : pour accorder le DO grave, on peut utiliser la fréquence relative du LA par rapport au DO grave : le LA n'est pas modifié, mais le DO est modifié.

Remarque 3 : les curseurs de note, de position et de zoom permettent d'accorder grossièrement une note avec son curseur (zoom de d'ordre de 75), de recentrer l'affichage avec le curseur "position", de prendre une valeur de zoom plus petite, de l'ordre de 50, et d'affiner l'accord, toujours avec le curseur de la note, mais plus finement. La valeur 0 du zoom permet un accord extrêmement précis, au delà de ce que l'oreille peut percevoir.

Remarque 4 : seul l'affichage est modifié par les curseurs position et zoom. Ils ne modifient pas la hauteur des notes. Eviter de déplacer un curseur de note entouré de rouge : la valeur qu'il veut traduire est hors de ses limites définies par les curseurs position et zoom. Il est préférable de prendre une valeur de position et de zoom appropriées avant de déplacer le curseur de note. Les boutons "R" permettent de remettre les curseurs position et zoom aux positions initiales, sans changer les hauteurs de notes. Le bouton "R" de position ne modifie pas la position des curseurs de notes.

Remarque 5 : les curseurs des notes permettent de réaliser à l'oreille un tempérament, comme on le fait pour chaque corde avec la clef d'accord d'un clavecin par exemple. Les octaves sont automatiquement accordées, sauf pour la note "Do aigu".

Lors du lancement du module, les notes sont accordées en tempérament égal, avec des octaves pures (rapport de fréquence 2 entre DO et DO aigu).

0 centième de demi-ton indique que la hauteur d'une note est celle du tempérament égal. L'accord du LA (en mauve) décale en bloc toutes les autres notes en conservant les intervalles.

La hauteur des notes sur fond jaune pâle ne peut pas être modifiée. Seules les notes sur fond jaune vif peuvent être accordées. On définit les notes qui peuvent être accordées par les "boutons radio" dans le "cycle des quintes" à droite.

La partie gauche permet essentiellement de vérifier l'incompatibilité d'avoir à la fois toutes les quintes pures et toutes les octaves pures, ou l'incompatibilité d'avoir à la fois toutes les tierces pures et toutes les octaves pures. Elle permet une perception plus tactile de l'accord d'un instrument à clavier.

B - A droite : cycle des quintes.

C'est de cette façon que procède un accordeur : il écoute les battements lorsqu'une quinte est jouée et répartit les inégalités des quintes pour partager l'octave.

Le bouton radio le plus extérieur du cercle permet de sélectionner quelle quinte va être modifiée : on peut élargir ou réduire la quinte sélectionnée en jaune vif par une valeur positive ou négative en centièmes de demi-ton, par un nombre positif ou négatif de commas syntoniques, ou par un nombre positif ou négatif de commas pythagoriciens (voir plus loin leur définition). Modifier une des 3 valeurs modifie automatiquement les 2 autres en cliquant hors de la boîte de saisie.

L'intérêt des centièmes de demi-ton vient de ce que les accordeurs électroniques du commerce sont gradués en centièmes de demi-ton. L'intérêt des commas pythagoriciens apparaît avec les quintes pures et l'intérêt des commas syntoniques apparaît avec les tierces pures.

Lorsqu'on modifie l'intervalle de la quinte en jaune vif, la quinte sur fond bleu est automatiquement modifiée en conséquence. Ceci permet de conserver les octaves pures, à l'exception du DO4 qui peut être accordé indépendamment (DO aigu).

Cette quinte sur fond bleu est sélectionnée par le bouton radio le plus intérieur au cercle.

Toutes les notes comprises entre la quinte en jaune vif et la quinte en bleu sont automatiquement modifiées dans la partie gauche du module. La note LA n'est jamais modifiée de cette façon. On ne peut modifier le LA que dans la partie mauve à gauche.

Lorsque plusieurs notes de la partie gauche sont en jaune vif, modifier l'une d'entre elles sur la partie gauche modifie toutes les autres notes sur fond jaune vif de la même quantité.

Le DO aigu (DO4) peut être accordé indépendamment ou à l'octave du DO grave (bouton dans la partie inférieure gauche).

Pour ne modifier l'accord que d'une seule note, sélectionner les deux quintes, dans le cycle des quintes, qui encadrent la note. Par exemple, pour accorder le SI, sélectionner en bleu la quinte SI-FA# et en jaune vif la quinte MI-SI. Toutes les cases qui sont alors en jaune vif permettent d'accorder le SI et seulement le SI.

Les quintes sont initialement celles du tempérament égal, avec 0 comma syntonique, 0 centième de demi-ton, et -0,0833333... comma pythagorien (soit $-1/12 = -0,0833333...$).

Remarque : le clavier Microkey KORG, sans transposition, joue du DO2 au DO5.

3 - Question fondamentale de l'accord d'un instrument à clavier

Définition des intervalles :

On appelle quinte l'intervalle qui sépare 5 notes. Par exemple : DO - SOL est une quinte car on peut compter les 5 notes : DO - RE - MI - FA - SOL. Autre exemple SI bémol - FA est une quinte : SI bémol - DO - RE - MI - FA. Plus précisément, une "quinte juste" comprend 7 demi-tons : Sib - SI - DO - DO# - RE - RE# - MI - FA. Une "quinte diminuée" comprend 6 demi-tons et une "quinte augmentée" comprend 8 demi-tons, toujours en séparant 5 notes. On ne considérera ici que des "quintes justes", qui pourront être "pures" ou non (voir ci-dessous pour la notion d'intervalle "pur").

On appelle tierce l'intervalle qui sépare 3 notes. Par exemple DO - MI est une tierce car on peut compter les 3 notes DO - RE - MI. On distingue les "tierces majeures" qui comprennent 4 demi-tons et les "tierces mineures" qui comprennent 3 demi-tons. On ne considérera ici que les tierces majeures, qui pourront être pures ou non.

Une octave sépare 8 notes et comprend 12 demi-tons. Par exemple : DO - RE - MI - FA - SOL - LA - SI - DO est la liste des notes dont les extrémités forment une octave.

Question fondamentale :

Cette question est : quel intervalle privilégier parmi l'octave (par ex : DO₂ - DO₃), la quinte (par ex : DO₂ - SOL₃, qui est en fait un redoublement de DO₂ - SOL₂) et la tierce (par ex : DO₂ - MI₄, qui est en fait un redoublement de DO₂ - MI₂) ? Pour comprendre cette question, jouer et regarder la figure sur l'oscilloscope (2 ms/div) :

- DO₂ et DO₃ : suivant le décalage temporel entre l'enfoncement des 2 touches, la figure est différente, mais le son est stable et la figure aussi.

--> L'intervalle entre les 2 notes est "pur".

- DO₂ et SOL₃ : la figure n'est pas stable. Le battement sonore est bien perceptible entre DO₄ et SOL₄.

--> L'intervalle de quinte pure n'est pas respecté.

- DO₂ et MI₄ : la figure n'est pas stable et on peut percevoir un battement ou une dureté dans l'accord DO₄ - MI₄.

--> L'intervalle de tierce pure n'est pas respecté.

La réponse à cette question est, soit de trouver un compromis acceptable pour les intervalles d'octave, de quinte et de tierce, en s'écartant légèrement du modèle des demi-tons égaux, soit de sacrifier un intervalle au profit d'un autre, ou d'une tonalité (fa # majeur par exemple) au profit d'une autre (sol majeur par exemple).

L'objectif des tempéraments inégaux est de mettre en valeur la musicalité des intervalles purs, d'exploiter les contrastes qui en résultent entre les tonalités, de tirer parti de l'inégalité des

intervalles dans une ligne mélodique et parfois de la couleur particulière d'accords fortement dissonants.

Différentes solutions ont été proposées. A l'exception de l'accord habituel du piano, où les octaves sont légèrement agrandies (rapport des fréquences un peu supérieur à 2), on impose aux octaves d'être pures (rapport des fréquences égal à 2).

4 - Le problème des quintes pures

1 - Propriétés des quintes pures

On s'intéresse à la quinte particulière DO-SOL.

Cette quinte, initialement tempérée suivant le tempérament égal (donc non pure) peut prendre une couleur musicale particulière lorsqu'elle devient pure, c'est à dire lorsqu'on n'entend plus de battement lorsqu'on joue les deux notes DO et SOL ensemble. Cette situation se caractérise également par une figure stable lorsqu'on regarde la forme d'onde sur un oscilloscope.

Accorder le SOL pour entendre et voir la quinte DO-SOL pure. Pour cela, mettre en bleu la quinte SOL RE et en jaune vif la quinte DO SOL. Accorder le SOL avec son curseur dans la partie gauche, en s'aidant des curseurs zoom et position (cf § 2 remarque 3).

On peut alors constater les indications suivantes :

A - Le rapport des fréquences du SOL par rapport au DO (fréquence relative du SOL dans la partie gauche du module) vaut $1,5 = 3/2$.

B - Le SOL a dû être remonté par rapport au tempérament égal de 1,95500086538 centièmes de demi-ton.

C - Le nombre de commas pythagoriciens caractérisant cette quinte DO-SOL est passé de : $- 1/12 = - 0,0833\bar{3}$... à 0 (lu sur le cycle des quintes).

2 - Accord avec 12 quintes pures : approche par l'oreille

On accorde successivement les 12 notes de la gamme en suivant le "cycle des quintes" :

DO - SOL - RE - LA - MI - SI - FA# - DO# - SOL# - RE# - SIb - FA - DO

L'accord d'un instrument à clavier débute traditionnellement par l'accord de la note LA, donnée par un diapason ou par un autre instrument qui ne peut pas s'accorder. Ceci se fait ici par le curseur du LA ou les valeurs sur fond violet. Une fréquence de 440 Hz est la norme actuelle. Les fréquences 392 Hz, 415 Hz et 466 Hz ont été utilisées.

Le détail des opérations, telles qu'elles sont exécutées par un accordeur professionnel, donc sans l'aide d'un appareil électronique, sont indiquées ci-dessous pour le module RTF 06-UT.

Repérer la touche du clavier qui correspond **au DO aigu**, accordé par son curseur propre lorsque le bouton "Do aigu ajustable indépendamment" est vert. Cette note sera traitée à part.

Sur le cycle des quintes :

Bleu : quinte MI - SI Jaune : quinte LA - MI

Accorder avec son curseur dans la partie gauche le MI sur le LA pour ne plus entendre de battements lorsqu'on joue la quinte LA - MI (quinte LA - MI pure) : la figure est alors stable sur l'oscilloscope. On notera la valeur très proche de 0 (rigoureusement nulle en théorie) du nombre de commas pythagoriciens lorsque la quinte LA - MI est pure. Zoomer dans la partie gauche pour affiner l'accord du MI.

Cette opération est répétée pour toutes les quintes :

Bleu : quinte SI - FA# Jaune : quinte MI - SI

Accorder le SI sur le MI pour ne plus entendre de battements lorsqu'on joue la quinte MI - SI.

Bleu : quinte FA# - DO# Jaune : quinte SI - FA #

Accorder le FA# sur le SI pour avoir la quinte SI - FA# pure.

Bleu : quinte DO# - SOL# Jaune : quinte FA# - DO#

Accorder le DO# sur le FA# pour avoir la quinte FA# - DO# pure.

Bleu : quinte SOL# - RE# Jaune : quinte DO# - SOL#

Accorder le SOL# sur le DO# pour avoir la quinte DO# - SOL# pure.

Bleu : quinte Mib - Sib Jaune : quinte LAb - Mib

Accorder le RE# (= Mib) sur le SOL # (= LAb) pour avoir la quinte LAB - Mib pure.

Bleu : quinte Sib - FA Jaune : quinte Mib - Sib

Accorder le Sib sur le Mib pour avoir la quinte Mib - Sib pure.

Bleu : quinte FA - DO Jaune : quinte Sib - FA

Accorder le FA sur le Sib pour avoir la quinte Sib - FA pure.

Bleu : quinte DO - SOL Jaune : quinte FA - DO

Accorder **le DO aigu** avec son curseur pour avoir la quinte FA - DO aigu pure.

On repart du LA pour la suite :

Bleu : quinte SOL - RE Jaune : quinte RE - LA

Accorder le RE sur le LA pour avoir la quinte RE - LA pure

Bleu : quinte DO - SOL Jaune : quinte SOL - RE

Accorder le SOL sur le RE pour avoir la quinte SOL - RE pure.

Bleu : quinte FA - DO Jaune : quinte DO - SOL

Accorder le DO grave (autre que le "DO aigu" déjà accordé) sur le SOL pour avoir la quinte DO grave - SOL pure.

Remarque : le module RTF 06-UT autorise un moyen plus rapide pour arriver au même résultat, mais moins musical : sélectionner en bleu la quinte FA-DO. On sélectionne

successivement les 11 autres quintes en jaune vif et on les règle à 0 comma pythagoricien, une des valeurs caractéristiques d'une quinte pure.

Le DO aigu (DO4) est accordé à une fréquence $3/2 = 1,5$ plus élevée que celle du FA dans la partie gauche du module (autre valeur caractéristique d'une quinte pure). Deux manières simples permettent d'y parvenir sont :

- Régler la fréquence relative au DO grave du DO aigu à $1,5 \times 1,35152435 = 2,027286525$ où $1,35152435$ est la fréquence relative du FA.

- Régler la fréquence en Hertz du DO4 à $1,5 \times 352,397409 \text{ Hz} = 528,5961 \text{ Hz}$ où $352,397409 \text{ Hz}$ est la fréquence du FA.

Ceci assure le rapport de fréquence $3/2 = 1,5$ caractéristique des quintes pures, entre le FA et le DO aigu.

3 - Observations

A - Vérifier en écoutant et en observant l'oscilloscope qu'on a bien 12 quintes pures :

DO3 - SOL3
SOL3 - RE4
RE3 - LA3
LA3 - MI4
MI3 - SI3
SI3 - FA#4
FA#3 - DO#4
DO#3 - SOL#3
SOL#3 - RE#4 (RE# est la même note que MIb)
MIb3 - SIb3
SIb2 - FA3
FA3 - DO4

Chacune de ces quintes pures correspond à un rapport de fréquence $3/2 = 1,5$ dont l'intérêt musical provient du rapport de fréquence 3 entre le 3^{ème} harmonique d'un son et sa fréquence fondamentale.

B - L'octave DO3 - DO4 n'est plus pure, et est même franchement désaccordée et inutilisable. On peut montrer (voir en annexe) que le rapport des fréquences n'est plus 2 mais :

$3^{12}/2^{18} = 531441/262144 = 2,027286529541015625$ qu'on doit retrouver suite à l'accord avec l'oreille, si celui-ci a été bien fait, dans la partie gauche du module.

C - En partant du LA, qui n'a pas bougé, toutes les autres notes ont été corrigées d'un multiple positif ou négatif de la valeur $1,95000678$ centièmes de demi-ton

4 - Comma pythagoricien

On imposera l'octave pure DO3 - DO4 par le bouton "DO aigu par octave" . L'octave DO3 - DO4 est alors pure, mais la quinte FA3 - DO4 ne l'est plus.

Sur le cycle, toutes les quintes en jaune (pâle ou vif) sont à 0 comma pythagoricien et la quinte FA - DO est à -1 comma pythagoricien.

C'est la définition même du comma pythagoricien : l'intervalle obtenu en juxtaposant 12 quintes pures est légèrement plus grand que l'octave. La petite quantité dont les 12 quintes pures dépassent l'octave est appelée "comma pythagoricien". Le rapport de fréquence qui définit le comma pythagoricien est donc $3^{12}/2^{19} = 531441/524288 = 1,013643265$.

Il y a donc une impossibilité à avoir toutes les quintes pures et toutes les octaves pures. C'est le **problème des quintes pures**.

Remarque 1 d'ordre mathématique :

Le calcul théorique exact du nombre n de centièmes de demi-tons entre la quinte pure et la quinte du tempérament égal donne :

$$n = \frac{\log\left(\frac{f_1}{f_0}\right)}{\log\left(\sqrt[1200]{2}\right)} \quad \text{dans le cas général de deux intervalles de rapports de fréquences } f_0 \text{ et } f_1, \text{ et :}$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^7}\right)}{\log\left(\sqrt[1200]{2}\right)} = 1200 \times \frac{\log\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{7}{12} \times \log(2)}{\log(2)} \approx 1,955000678 \quad \text{dans le cas de la quinte pure } f_1 = \frac{3}{2} \text{ et}$$

de la quinte du tempérament égal $f_0 = \left(\sqrt[12]{2}\right)^7$. Une quinte du tempérament égal vaut 7 demi-tons. Ce calcul fait intervenir la fonction logarithme log (népérien ou décimal, peu importe).

Remarque 2 : le calcul du nombre de centièmes de demi-ton du comma pythagoricien est :

$$N_p = 12 \times \frac{\log\left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^7}\right)}{\log\left(\sqrt[1200]{2}\right)} = 12 \times 1200 \times \frac{\log\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{7}{12} \times \log(2)}{\log(2)} \approx 23,46000814 \quad \text{centièmes de demi-tons}$$

5 - Solution pour les quintes pures - Tempérament pythagoricien

Les tonalités les plus utilisées comportent peu d'altérations (peu de dièses # ou de bémols b). On sacrifie les tonalités qui ont beaucoup d'altérations comme Do # majeur ou Sol # majeur au profit des tonalités qui ont peu d'altérations. On sauve les octaves en sacrifiant une quinte, souvent SOL # - MI b.

Chaque quinte est agrandie par rapport au tempérament égal d'un douzième de comma pythagoricien = $23,46000814/12 = 1,955000678$ centièmes de demi-ton. Si on conserve les octaves pures, 11 quintes sont agrandies de $1/12$ de comma pythagoricien et la douzième quinte doit être sacrifiée, raccourcie de $- 11/12$ de comma pythagoricien = $- 21,5050951$ centièmes de demi-ton.

La somme du nombre de commas pythagoriciens sur toutes les quintes du cycle est toujours - 1. Soit il est réparti sur toutes les quintes de $- 1/12 = -0,08333\bar{3}$... (tempérament égal), soit il est réparti de façon différente (tempérament inégal). Le tempérament pythagoricien concentre le comma sur une seule quinte, inutilisable. On choisit pour cette quinte un intervalle rarement utilisé, le plus souvent SOL# - Mib.

Sélectionner en bleu la quinte SOL# - Mib. Sélectionner en jaune vif la quinte FA - DO. Régler la quinte FA - DO pure (0 comma pythagoricien). La quinte SOL# - Mib est alors tempérée à -1 comma pythagoricien et est inutilisable.

Jouer quelques accords dans ce tempérament pythagoricien.

Voir le schéma "[Cycle des quintes pour le tempérament pythagoricien](#)".

6 - Tempéraments allemands - Tempérament Werkmeister III

D'autres façons de résoudre musicalement cette question des quintes pures ont été proposées au XVII^{ème} siècle.

Le tempérament Werkmeister III comporte 4 quintes raccourcies de $- 1/4 = -0,25$ comma pythagoricien :

DO - SOL

SOL - RE

RE - LA

MI - SI

Toutes les autres quintes sont pures à 0 comma pythagoricien.

On considère que c'est un des tempéraments utilisé par Johann Sebastian Bach pour jouer son "Clavier bien tempéré".

Réaliser le tempérament Werkmeister III avec le module RTF 06-UT. Jouer quelques accords.

De nombreux autres tempéraments basés sur les quintes pures ont été proposés en Allemagne à cette époque.

7 - Le problème des tierces pures

Relancer le RTF 06-UT (réglages à l'ouverture). Cocher éventuellement " Do aigu ajustable indépendant ".

Accorder le MI3 pour avoir la tierce majeure DO3 - MI3 pure.

Pour cela : on laisse les trois quintes DO - SOL, SOL - RE, RE - LA accordées comme en tempérament égal à 0 centièmes de demi-ton, soit $- 1/12 = - 0,083333333 \dots$ comma pythagoricien, dont il a été question pour les quintes pures, soit encore 0 comma syntonique dont il va bientôt être question. La seule quinte qui va être modifiée est la quinte LA - MI (en jaune vif) et on met en bleu la quinte MI - SI.

Accorder le MI à l'oreille en jouant la tierce DO - MI. Lorsqu'on n'entend plus de battement, la tierce DO - MI est pure.

On constate que la quinte LA - MI est raccourcie d'une valeur très proche de -1, dans l'unité "comma syntonique" du cercle des quintes. Le comma syntonique sera utilisé pour décrire les tempéraments basés sur les tierces pures.

Accorder de même le SOL#3 pour avoir la tierce MI3 - SOL#3 pure. Pour cela, on ne touche pas ou on remet les quintes MI -SI, SI - FA# et FA# - DO# à 0 comma syntonique.

On accorde le SOL# avec la quinte DO# - SOL# en jaune vif et la quinte SOL# - RE# en bleu, pour entendre la tierce MI - SOL# pure. On constate à nouveau que la quinte DO# - SOL# est raccourcie de -1 comma syntonique.

Accorder le DO aigu pour avoir la tierce LAb3 - DO4 pure (LAb est la même note que SOL#).

On doit constater que le rapport de fréquence pour la tierce DO3 - MI3 pure est $5/4 = 1,25$.

La fréquence relative DO - SOL# est $(5/4) \times (5/4) = 1,25 \times 1,25 = 1,5625$.

La fréquence relative DO3 - DO4 est $(5/4) \times (5/4) \times (5/4) = 1,25 \times 1,25 \times 1,25 = 1,953125$.

On constate que l'octave DO3 - DO4 n'est pas pure et a été fortement raccourcie (inutilisable).

On constate que DO4 est accordé environ 41 centièmes de demi-ton plus bas que DO3. Le problème des tierces et des octaves est encore plus grand que celui des quintes et des octaves : on ne pourra pas à la fois avoir toutes les tierces pures et toutes les octaves pures.

Remarque : avec les tierces pures intervient l'intervalle de 13,68 centièmes de demi-ton environ. La valeur théorique précise est :

$$n = \frac{\log\left(\frac{5}{4}\right)}{\log(\sqrt[12]{2})} = 1200 \times \frac{\log\left(\frac{5}{4}\right) - \frac{1}{3} \times \log(2)}{\log(2)} \approx -13,68628614 \quad \text{centièmes de demi-ton. C'est la quantité}$$

dont est raccourcie une tierce pure par rapport à une tierce du tempérament égal. Cette quantité s'appelle le "comma syntonique". Cette valeur est donnée en prenant comme référence le tempérament égal. On pourra trouver une valeur différente du comma syntonique lorsque la référence prise est le tempérament pythagoricien avec des quintes pures. Le rapport des fréquences pour l'intervalle pur DO2 - MI4 est égal à 5, et le rapport des fréquences de MI2 à MI4 est égal à 4, donc le rapport des fréquences $f_1 = \frac{5}{4} = 1,25$ pour la tierce pure DO2 - MI2. Il y a 4 demi-tons dans une tierce majeure, donc le rapport des fréquences pour une tierce majeure du tempérament égal est $f_0 = (\sqrt[12]{2})^4 = \sqrt[3]{2} \approx 1,25992105$.

7 - Solution pour les tierces pures - Tempérament mésotonique

La recherche d'un accord qui favorise les tierces pures a abouti au "tempérament mésotonique", utilisé de façon quasi exclusive dans toute l'Europe aux XVI^{ème} et XVII^{ème} siècles. De nombreux musiciens l'utilisent encore aujourd'hui du fait du grand intérêt musical qu'il présente.

Il est schématisé sur le cercle "[Cycle des quintes pour le tempérament mésotonique](#)". Ce schéma indique la valeur d'accord en 100^{ème} de demi-ton de chaque note et l'intervalle en fraction de comma (syntonique ici) dont on réduit ou augmente chaque quinte.

On cherche ici à avoir le maximum de tierces pures, en préservant toutes les octaves pures.

Onze quintes sont réduites d'un quart de comma syntonique, soit -3,421571534 centièmes de demi-ton. Il faut en effet 4 quintes pour former un redoublement de tierce, comme par exemple la tierce DO - MI :

DO - SOL - RE - LA - MI.

On répartit le comma sur les 4 quintes. 11 quintes sont alors accordées avec une réduction de - 1 / 4 de comma syntonique.

On peut calculer que la 12^{ème} quinte doit être augmentée de 11/4 de comma syntonique, soit +37,63728689 centièmes de demi-ton. Cette quinte est inutilisable. C'est souvent la quinte SOL# - Mib ou la quinte RE# - Sib. On verra parfois la valeur 7/4 de comma syntonique (au

lieu de 11/4) lorsque la référence n'est pas prise par rapport au tempérament égal, mais par rapport au tempérament pythagoricien (la somme doit être -1 sur le cycle dans ce cas).

Dans le tempérament mésotonique, les tierces suivantes sont rigoureusement pures :

MI b - SOL
SI b - RE
FA - LA
DO - MI
SOL - SI
RE - FA #
LA - DO #
MI - SOL #

On note que pour le tempérament pythagoricien, on augmente 11 quintes de 2,1327 centièmes de demi-ton et que pour le tempérament mésotonique, on raccourcit 11 quintes de 3,3215 centièmes de demi-ton. Dans les 2 cas, la douzième quinte est sacrifiée.

Réaliser le tempérament mésotonique, soit à l'oreille, soit en réglant les 11 quintes utilisables à - 0,25 comma syntonique. On met pour cela la quinte sacrifiée en bleu, et la quinte à tempérer en jaune vif.

Vérifier la pureté des intervalles de tierce et le fait que les intervalles de quinte (sauf SOL # - RE #) sont acceptables.

Jouer quelques accords pour percevoir la musicalité de ce tempérament. Un mouvement chromatique (gamme montée par demi-tons) est très coloré en mésotonique, car l'inégalité de ce tempérament est très prononcée. Le répertoire composé pour ce tempérament est immense.

Remarque 1 : de nombreux autres tempéraments inégaux, caractérisés par leur cycle des quintes, ont été proposés. Certains compositeurs contemporains occidentaux, en allant plus loin dans la recherche de l'accord d'un instrument à clavier, ont écrit pour des instruments accordés en quarts de ton au lieu des habituels demi-tons.

Remarque 2 : des instruments, en particulier des clavecins, mais aussi des claviers de synthétiseurs contemporains, ont été construits avec des "doubles feintes" (les touches noires d'un clavier) pour éviter la quinte problématique de ces tempéraments inégaux. Le musicien dispose alors de 2 RE # : le premier peut être joué dans un intervalle de tierce SI - RE # (ou de quinte SOL # - RE #) et le second dans un intervalle de tierce MIb - SOL (ou de quinte RE # - LA #).

Remarque 3 : L'intérêt musical des tierces pures (rapport de fréquence de $5/4 = 1,25$) vient du fait que le cinquième harmonique d'un son a une fréquence égale à 5 fois celle du son fondamental.

Annexe 1 : Fréquences relatives au DO grave pour des quintes pures

Le passage à la quinte donne un facteur $3/2$ et un saut d'octave donne un facteur $1/2$.

DO	:	1
SOL	:	$3/2 = 1,5$
RE	:	$9/8 = 1,125$
LA	:	$27/16 = 1,6875$
MI	:	$81/64 = 1,265625$
SI	:	$243/128 = 1,8984375$
FA#	:	$729/512 = 1,423828125$
DO#	:	$2187/2048 = 1,06787109375$
SOL#	:	$6561/4096 = 1,601806640625$
RE#	:	$19683/16384 = 1,20135498046875$
SIb	:	$59049/32768 = 1,802032470703125$
FA	:	$177147/131072 = 1,35152435302734375$
DO aigu	:	$531441/262144 = 2,027286529541015625$

Annexe 2 : Fréquences relatives au DO grave pour des tierces pures

Le passage à la quinte donne un facteur $5^{(1/4)}$ et un saut d'octave donne un facteur 1/2.

DO	:	1
SOL	:	$5^{(1/4)}/1 = 1,49534878122122051911899$
RE	:	$5^{(1/2)}/2 = 1,118033988749894848204587$
LA	:	$5^{(3/4)}/2 = 1,671850762441055060008082$
MI	:	$5/4 = 1,25$
SI	:	$5 \times 5^{(1/4)}/4 = 1,869185976526525677389874$
FA#	:	$5 \times 5^{(1/2)}/8 = 1,397542485937368560255734$
DO#	:	$5 \times 5^{(3/4)}/16 = 1,044906726525659412505052$
SOL#	:	$25/16 = 1,5625$
RE#	:	$25 \times 5^{(1/4)}/32 = 1,168241235329078548368671$
SIb	:	$25 \times 5^{(1/2)}/32 = 1,746928107421710700319667$
FA	:	$25 \times 5^{(3/4)}/64 = 1,306133408157074265631314$
DO aigu	:	$125/64 = 1,953125$

Annexe 3 : Fréquences relatives au DO grave pour le tempérament égal

Un demi-ton donne un facteur $2^{(1/12)}$ et un saut d'octave donne un facteur 1/2.

DO	:	1
DO#	:	$(2^{(1/12)})^1 = 1,059463094359295264561825$
RE	:	$(2^{(1/12)})^2 = 1,122462048309372981433533$
RE#	:	$(2^{(1/12)})^3 = 1,189207115002721066717500$
MI	:	$(2^{(1/12)})^4 = 1,259921049894873164767211$
FA	:	$(2^{(1/12)})^5 = 1,334839854170034364830832$
FA#	:	$(2^{(1/12)})^6 = 1,414213562373095048801689$
SOL	:	$(2^{(1/12)})^7 = 1,498307076876681498799281$
SOL#	:	$(2^{(1/12)})^8 = 1,587401051968199474751706$
LA	:	$(2^{(1/12)})^9 = 1,681792830507429086062251$
LA#	:	$(2^{(1/12)})^{10} = 1,78179436280678609480452$
SI	:	$(2^{(1/12)})^{11} = 1,887748625363386993283826$
DO aigu	:	$(2^{(1/12)})^{12} = 2$