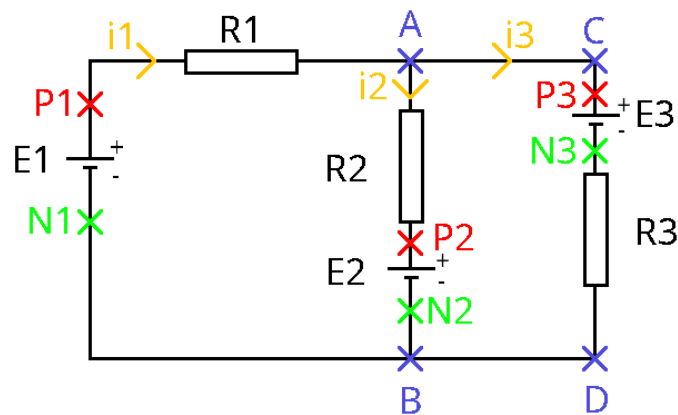


Résolution d'un problème d'électricité

Notions de base

1 – Exemple de schéma



Ce circuit comporte 3 générateurs de forces électromotrices E_1 , E_2 et E_3 , supposées connues. Il comporte aussi 3 récepteurs ohmiques de résistances R_1 , R_2 et R_3 , supposées connues également. Il y a 2 nœuds A et B. Le courant d'intensité i_1 se sépare en 2 courants i_2 et i_3 au nœud A. Les 2 courants i_2 et i_3 se recombinent en le courant i_1 au nœuds B. Les pôles + des générateurs sont repérés par les points P1, P2 et P3. Leurs pôles – sont repérés par les points N1, N2, N3. On peut donner des noms à d'autres points du circuit pour faciliter la résolution, comme C et D. Cette résolution consiste à trouver les valeurs des 3 intensités i_1 , i_2 et i_3 . On peut alors trouver la tension U_{P1A} aux bornes de la résistance R_1 , la tension U_{AP2} aux bornes de la résistance R_2 , et la tension U_{N3D} aux bornes de la résistance R_3 . Toutes les grandeurs électriques du circuit sont alors connues et la résolution est terminée.

Plusieurs méthodes de résolution sont possibles. La méthode des nœuds et des mailles n'est pas toujours la plus rapide, mais elle aboutit toujours au résultat, quelle que soit la complexité du circuit.

Il y a 3 mailles dans le circuit :

- N1, P1, A, C, P3, N3, D, B, N1
- N1, P1, A, P2, N2, B, N1
- A, C, P3, N3, D, B, N2, P2, A

Pour décrire une maille, on part d'un point et on y revient.

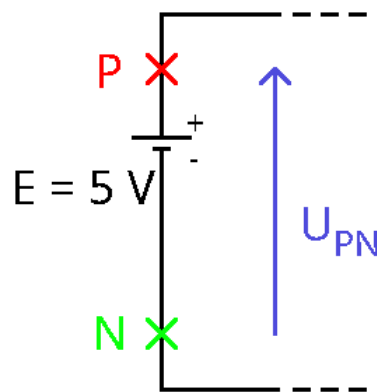
Il y a 3 branches dans le circuit, caractérisées par une valeur de l'intensité i :

- A, P2, N2, B (intensité i_2)
- A, P1, N1, B (intensité i_1)
- A, C, P3, N3, D, B (intensité i_3)

Une branche débute à un nœud et finit à un nœud voisin.

2 – Convention pour un générateur

Le schéma ci-dessous doit être mémorisé :

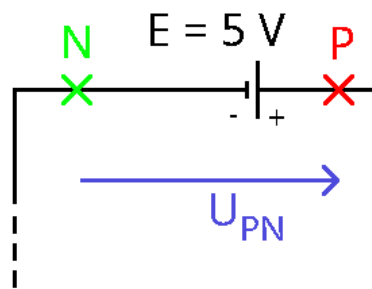


Le point N est au pôle négatif du générateur. Le point P est au pôle positif. Le générateur est caractérisé par sa force électromotrice E , qui vaut ici 5 volts (nombre positif). La tension U_{PN} est égale à E et c'est donc un nombre positif, qui vaut ici 5 volts. La tension U_{NP} est l'opposée de U_{PN} . U_{NP} est donc un nombre négatif. On retiendra donc le schéma en indiquant la tension U_{PN} (et non U_{NP}).

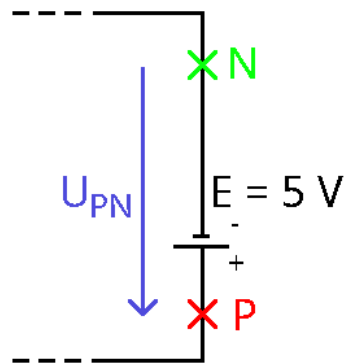
La flèche à côté de U_{PN} monte de N vers P. Elle indique donc que le potentiel en P est supérieur au potentiel en N. La différence de potentiel est une mesure de l'énergie reçue par une charge lorsqu'elle traverse le générateur de N vers P.

U_{PN} est mesurée en branchant la borne COM (noire) d'un voltmètre au point N et la borne V (rouge) au point P. La tension lue est alors positive.

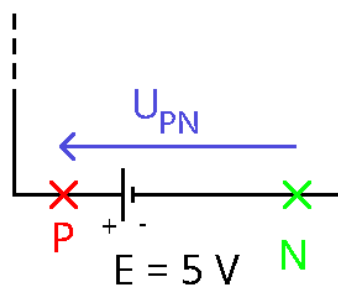
On peut retrouver 3 autres dispositions de cette convention en faisant tourner la figure de 90° :



ou :

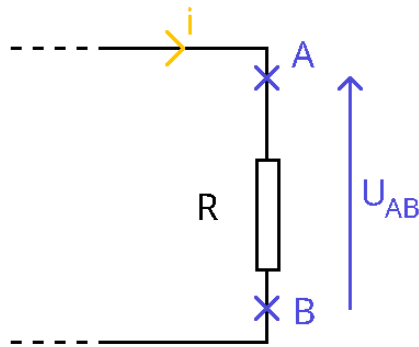


ou :



3 – Convention pour un récepteur ohmique

Le schéma ci-dessous devra également être mémorisé :



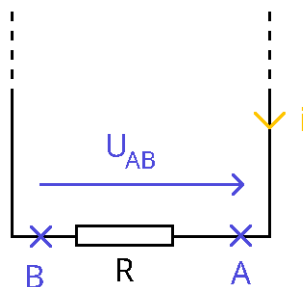
La loi d'Ohm pour le récepteur ohmique R s'écrit :

$$U_{AB} = R \cdot i$$

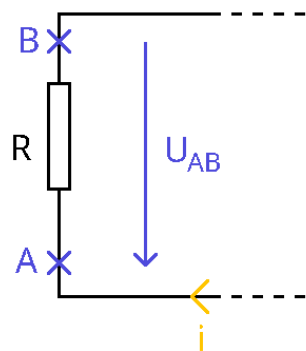
R est la résistance en ohm du récepteur, paramètre positif. Si l'intensité i est positive avec le sens indiqué sur la figure ci-dessus, U_{AB} est une tension positive.

On notera que le sens choisi positif pour i (flèche jaune qui indique un courant qui entre en A dans le dipôle et qui ressort en B), s'accompagne d'une flèche (mauve) pour U_{AB} qui va de B vers A. Cette convention illustre le fait que le potentiel (ou l'énergie) des charges est plus grande en A qu'en B. La différence d'énergie, qui correspond visuellement à une différence de hauteur entre A et B, est l'énergie transformée par le récepteur en une autre forme d'énergie. On mesure U_{AB} avec la borne COM du voltmètre en B et la borne V en A.

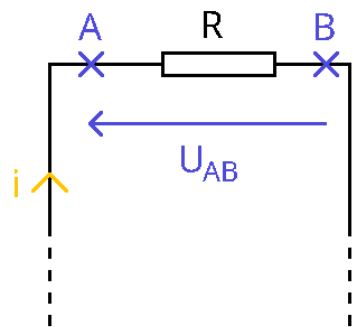
On peut retrouver 3 autres dispositions de cette convention en faisant tourner la figure de 90° :



ou :

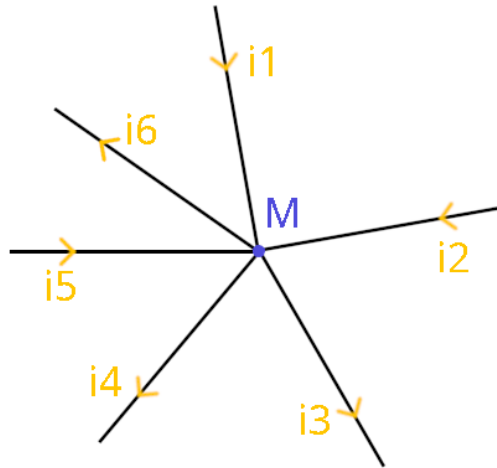


ou :



4 – Loi des nœuds

Un nœud est un point du circuit auquel au moins 3 fils aboutissent.



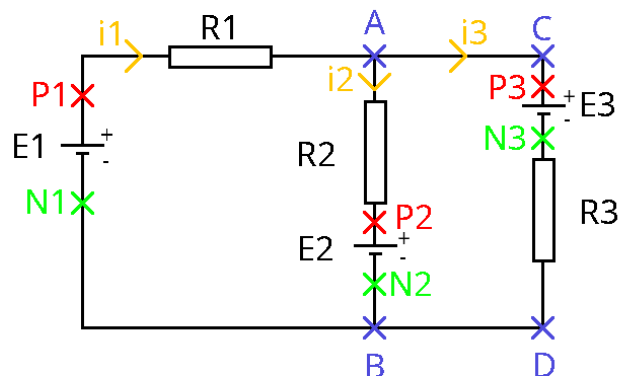
Comme les charges n'apparaissent pas, ne disparaissent pas ni ne s'accumulent en ce point, la somme des intensités qui entrent dans le nœud est égale à la somme des intensités qui sortent de ce nœud. Un nœud fournit une relation pour trouver les intensités.

Pour la figure ci-dessus, la loi des nœuds s'écrit au nœud M :

$$i_1 + i_2 + i_5 = i_3 + i_4 + i_6$$

5 – Loi des mailles

Une maille est un parcours d'une portion du circuit avec un retour au point de départ. Quel que soit ce parcours, la tension entre le point de départ et le point d'arrivée (qui est le même point) est nulle.



Pour la maille A, C, P3, N3, D, B, N2, P2, A on a par exemple la relation suivante :

$$U_{AC} + U_{CP3} + U_{P3N3} + U_{N3D} + U_{DB} + U_{BN2} + U_{N2P2} + U_{P2A} = 0$$

On part du point A et on finit au point A. La seule règle à respecter est la lettre commune entre 2 tensions successives de la somme. Chaque maille fournit une relation pour trouver les tensions. Entre 2 nœuds d'une maille, donc dans une branche du circuit, il peut y avoir un générateur et/ou un récepteur. Chaque branche d'une maille peut être traversée par une intensité différente de celle d'une autre branche de la même maille. S'il y a plusieurs générateurs dans une branche, on les remplace par 1 seul générateur équivalent. S'il y a plusieurs récepteurs dans une branche, on les remplace par 1 seul récepteur équivalent.

6 – Caractéristique d'un dipôle

Chaque dipôle est caractérisé par la relation entre l'intensité i qui le traverse et la tension U_{AB} à ses bornes.

Exemples :

- Un conducteur ohmique est caractérisé par sa résistance R en ohm telle que $U_{AB} = R \cdot i$
- Un fil conducteur parfait entre un point A et un point B est caractérisé par une tension $U_{AB} = 0 \text{ V}$.
- Un générateur de tension parfait est caractérisé par sa force électromotrice E , telle que $U_{PN} = E$ quelle que soit l'intensité i qui le traverse.
- Un générateur de courant parfait est caractérisé par son « intensité de court-circuit » I_{cc} , telle que l'intensité i qui le traverse soit I_{cc} quel que soit ce qui est branché à ses bornes.
- Une ampoule à filament a une relation voisine de $U_{AB} = U_0 \cdot i^3$. (i au cube)
- Une diode et une LED présentent une tension de seuil de l'ordre de 0.6 volt en dessous de laquelle l'intensité i est quasiment nulle et au dessus de laquelle l'intensité est très grande (risque de destruction) dans le sens « passant ». Dans l'autre sens, (sens « bloquant »), aucun courant ne circule, tant que la tension ne dépasse pas une valeur limite de destruction ou une tension appelée tension Zener, pour des diodes spécifiquement prévues pour fonctionner de cette façon.

Il en est de même pour tous les dipôles qui sont caractérisés par une relation entre l'intensité i qui le traverse et la tension U à ses bornes.

La connaissance de la caractéristique d'un dipôle fournit une relation pour la résolution du circuit.

Rappel : un problème peut en général être résolu s'il y a autant de relations entre les inconnues qu'il y a d'inconnues.

7 – Résolution

On reprend la relation obtenue pour la maille A, C, P3, N3, D, B, N2, P2, A :

$$U_{AC} + U_{CP3} + U_{P3N3} + U_{N3D} + U_{DB} + U_{BN2} + U_{N2P2} + U_{P2A} = 0$$

On utilise les caractéristiques des 8 dipôles aux bornes desquelles les 8 tensions ci-dessus apparaissent :

$$U_{AC} = 0 \text{ volt (conducteur parfait)}$$

$$U_{CP3} = 0 \text{ volt (conducteur parfait)}$$

$$U_{P3N3} = E3 \text{ (générateur de tension parfait, convention du paragraphe 2)}$$

$$U_{N3D} = R3 \cdot i3 \text{ (récepteur ohmique, convention du paragraphe 3)}$$

$$U_{DB} = 0 \text{ volt (conducteur parfait)}$$

$$U_{BN2} = 0 \text{ volt (conducteur parfait)}$$

$$U_{N2P2} = - U_{P2N2} \text{ avec } U_{P2N2} = E2 \text{ (générateur de tension parfait, convention du paragraphe 2)}$$

$$U_{P2A} = - U_{AP2} \text{ avec } U_{AP2} = R2 \cdot i2 \text{ (récepteur ohmique, convention du paragraphe 3)}$$

La relation ci-dessus se simplifie donc :

$$0 + 0 + E3 + R3 \cdot i3 + 0 + 0 - E2 - R2 \cdot i2 = 0$$

soit :

$$E3 + R3 \cdot i3 - E2 - R2 \cdot i2 = 0 \text{ où les 2 inconnues sont } i2 \text{ et } i3.$$

La maille N1, P1, A, P2, N2, B, N1 donne la relation :

$$U_{N1P1} + U_{P1A} + U_{AP2} + U_{P2N2} + U_{N2B} + U_{BN1} = 0$$

Les caractéristiques des 6 dipôles impliqués donnent :

$$U_{N1P1} = - U_{P1N1} \text{ avec } U_{P1N1} = E1 \text{ (générateur de tension parfait, convention du paragraphe 2)}$$

$$U_{P1A} = R1 \cdot i1 \text{ (récepteur ohmique, convention du paragraphe 3)}$$

$$U_{AP2} = R2 \cdot i2 \text{ (récepteur ohmique, convention du paragraphe 3)}$$

$$U_{P2N2} = E2 \text{ (générateur de tension parfait, convention du paragraphe 2)}$$

$$U_{N2B} = 0 \text{ V (conducteur parfait)}$$

$$U_{BN1} = 0 \text{ V (conducteur parfait)}$$

La relation ci-dessus se simplifie donc :

$$- E1 + R1 \cdot i1 + R2 \cdot i2 = 0 \text{ où les inconnues sont } i1 \text{ et } i2.$$

On pourrait décrire une 3ème maille, mais elle n'apporterait pas d'information supplémentaire. Par contre la loi des nœuds appliquée au nœud A donne :

$$i1 = i2 + i3$$

À nouveau, le nœud B redonnerait la même information que le nœud A.
On remplace i_1 par $i_2 + i_3$ dans les 2 relations déduites de la loi des mailles :

$$E_3 + R_3 \cdot i_3 - E_2 - R_2 \cdot i_2 = 0$$

$$- E_1 + R_1 \cdot (i_2 + i_3) + R_2 \cdot i_2 = 0 \quad \text{où les 2 inconnues sont } i_2 \text{ et } i_3.$$

On obtient, en résolvant le système linéaire de 2 équations à 2 inconnues ci-dessus :

$$i_2 = (R_3 \cdot E_1 + R_1 \cdot E_3 - E_2 \cdot (R_1 + R_3)) / (R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3)$$

$$i_3 = (R_2 \cdot E_1 + R_1 \cdot E_2 - E_3 \cdot (R_1 + R_2)) / (R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3)$$

et, avec la loi des nœuds :

$$i_1 = i_2 + i_3 = (E_1 \cdot (R_2 + R_3) - R_2 \cdot E_3 - R_3 \cdot E_2) / (R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3)$$

8 – Application numérique

On peut faire une application numérique avec, par exemple : $E_1 = 5$ volts , $E_2 = 2$ volts $E_3 = 8$ volts,
 $R_1 = 100 \, \Omega$, $R_2 = 500 \, \Omega$ et $R_3 = 300 \, \Omega$. On trouve :

$$i_1 = -600 / 230000 = - 0.002608696 \, \text{A}$$

$$i_2 = 1500 / 230000 = 0.006521739 \, \text{A}$$

$$i_3 = - 2100 / 230000 = - 0.009130435 \, \text{A}$$

Ces résultats sont confirmés par le calcul numérique avec Labellec :

https://www.tucllic.fr/electricite/labelec_01_03.htm

ainsi que sa documentation :

https://tucllic.fr/electricite/labelec_02.pdf

Voici les captures d'écran qui correspondent, avec pour la maille 1 : $E = E_1 - E_2 = 3 \, \text{V}$ et pour la maille 2 : $E = E_1 - E_3 = - 3 \, \text{V}$. Comme il y a 2 générateurs dans chacune de ces mailles, on considère dans chacune le générateur équivalent, somme des 2, en comptant positivement une force électromotrice qui a tendance à faire circuler le courant dans le sens horaire et négativement une force électromotrice qui a tendance à faire circuler le courant dans le sens anti-horaire.

Labelec 01 V1.00 : loi des noeuds et loi des mailles (cas linéaire)

Données générales

Nombre de mailles indépendantes :

Nombre total de courants :

Type de résolution : ☒ Continu (réel) ☐ Sinusoïdal (complexe)

Validation 1

Loi des noeuds

Cocher les 2 courants de base indépendants parmi les 3 courants suivants :

i_1 : ☐ i_2 : ☒ i_3 : ☒

Validation 2

Ecrire la loi des noeuds pour chacun des 1 noeuds indépendants suivants :

Noeud 1 : $i_1 = + \downarrow i_2 + \downarrow i_3$

Loi des mailles

Indiquer, pour chacune des 2 mailles indépendantes le sens du courant i qui traverse la résistance R (+ : sens horaire, - : sens antihoraire) :

Maille 1 : $E_1 = + \downarrow R_1 \times i_1 + \downarrow R_2 \times i_2 + 0 \downarrow R_3 \times i_3$

Maille 2 : $E_2 = + \downarrow R_1 \times i_1 + 0 \downarrow R_2 \times i_2 + \downarrow R_3 \times i_3$

Données numériques

Introduire les valeurs numériques : les résistances sont positives
et les forces électromotrices sont positives si elles ont tendance à faire circuler
le courant dans le sens horaire de la maille

Indiquer, pour chacune des 2 mailles indépendantes le sens du courant i qui traverse la résistance R (+ : sens horaire, - : sens antihoraire):

Maille 1 : $E_1 = R_1 \times i_1 + R_2 \times i_2 + 0 \times i_3$

Maille 2 : $E_2 = + R_1 \times i_1 + 0 + R_2 \times i_2 + R_3 \times i_3$

Introduire les valeurs numériques : les résistances sont positives
et les forces électromotrices sont positives si elles ont tendance à faire circuler
le courant dans le sens horaire de la maille

Maille 1 : $E_1 = 3$

Maille 2 : $E_2 = -3$

$R_1 = 100$

R_2 = 500

R_3 = 300

Résultats

$$i_2 = 0.006521739130434783$$

$$i^3 = -0.009130434782608696$$

i 1 = -0.0026086956521739132