Centre de gravité

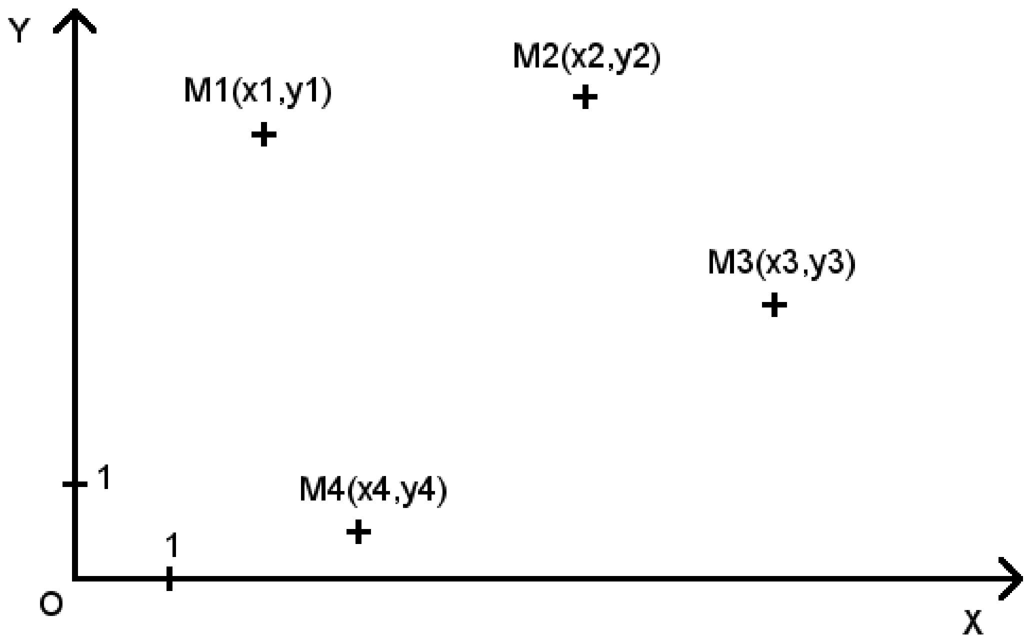
La notion de centre de gravité en physique est à rapprocher de celle de centre d'inertie et de celle de barycentre en mathématiques.

1 - Centre de gravité de masses ponctuelles fixes

Exemple : on considère 4 masses ponctuelles :

- masse ponctuelle m1 située au point M1(x1,y1)
- masse ponctuelle m2 située au point M2(x2,y2)
- masse ponctuelle m3 située au point M3(x3,y3)
- masse ponctuelle m4 située au point M4(x4,y4)

Ceci correspond par exemple à la figure ci-dessous :



Les masses m1, m2, m3, m4 situées aux points M1, M2, M3, M4 sont soumises à des forces P1, P2, P3, P4, leur poids, dirigées vers le centre de la Terre, égales à :

$$P1 = m1 \times g$$
$$P2 = m2 \times g$$

$P3 = m3 \times g$
$P4 = m4 \times g$

où g est l'intensité de la pesanteur : g = 9,81 m.s^{-2} numériquement égale à la vitesse d'un objet lâché immobile, au bout d'une seconde de chute, soit 9,81 mètre par seconde.

Du point de vue de la Mécanique, qui étudie les forces et les mouvements, ce système de 4 masses est équivalent pour certains aspects à une masse M = m1 + m2 + m3 + m4 située au centre de gravité G, dont les cordonnées xG et yG sont :

$$xG = \frac{1}{M} \times [(m1 \times x1) + (m2 \times x2) + (m3 \times x3) + (m4 \times x4)]$$

et :

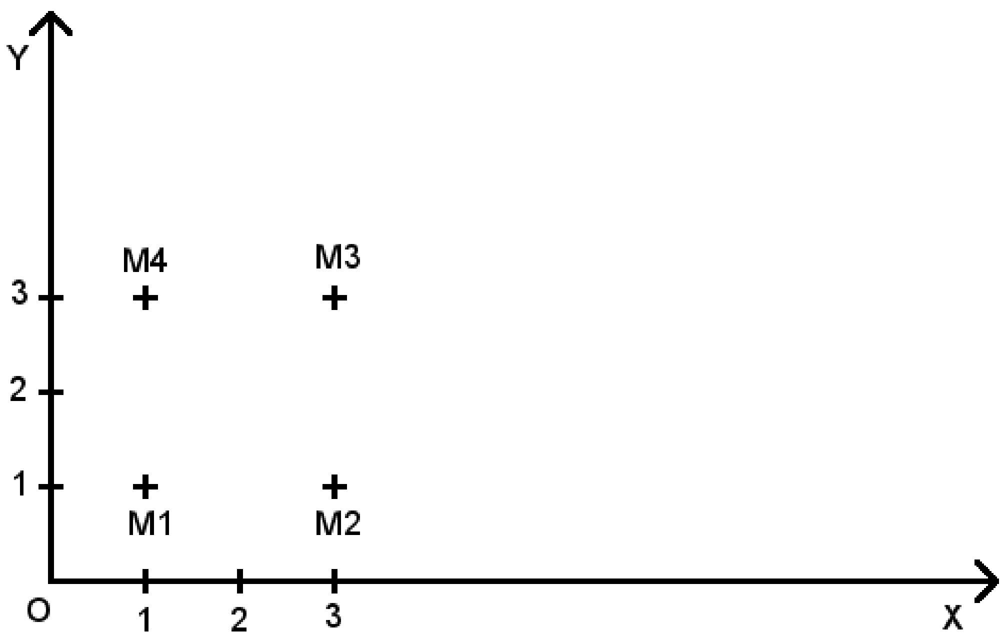
$$yG = \frac{1}{M} \times [(m1 \times y1) + (m2 \times y2) + (m3 \times y3) + (m4 \times y4)]$$

Exemple numérique :

On prend 4 points M1(1,1), M2(3,1) , M3(3,3) et M4(1,3) sommets d'un carré, positions de 4 masses égales :

m1 = m2 = m3 = m4 = m

Ces positions sont représentées ci-dessous :



On a : M = m1 + m2 + m3 + m4 = m + m + m + m = 4 m

et :

$$xG=\frac{1}{4\times m}\times[(m\times1)+(m\times3)+(m\times3)+(m\times1)]$$

soit :

$$xG=\frac{8\times m}{4\times m}=2$$

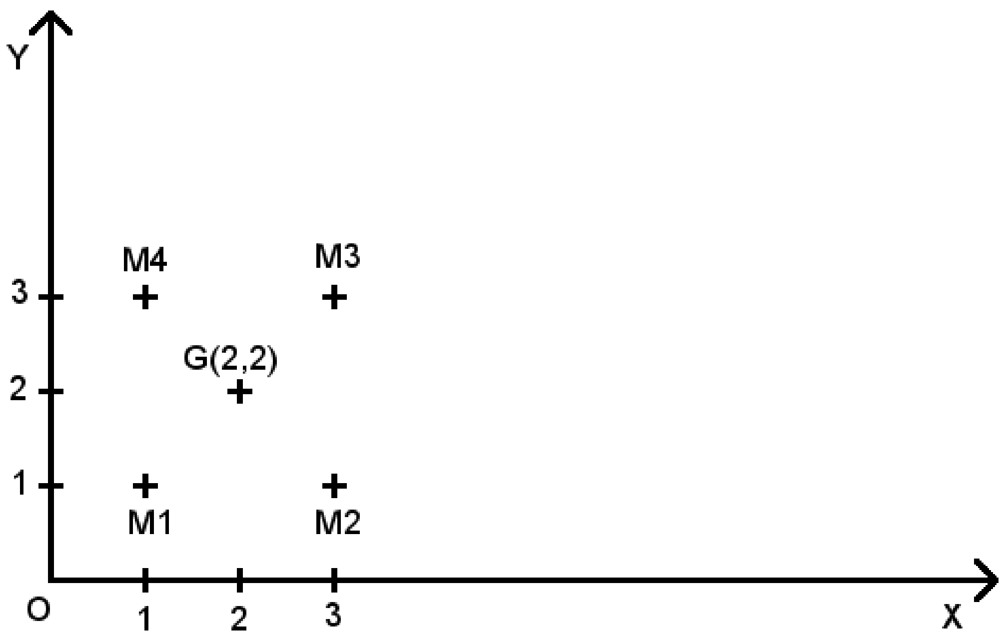
On a aussi :

$$yG=\frac{1}{4\times m}\times[(m\times1)+(m\times1)+(m\times3)+(m\times3)]$$

soit :

$$yG=\frac{8\times m}{4\times m}=2$$

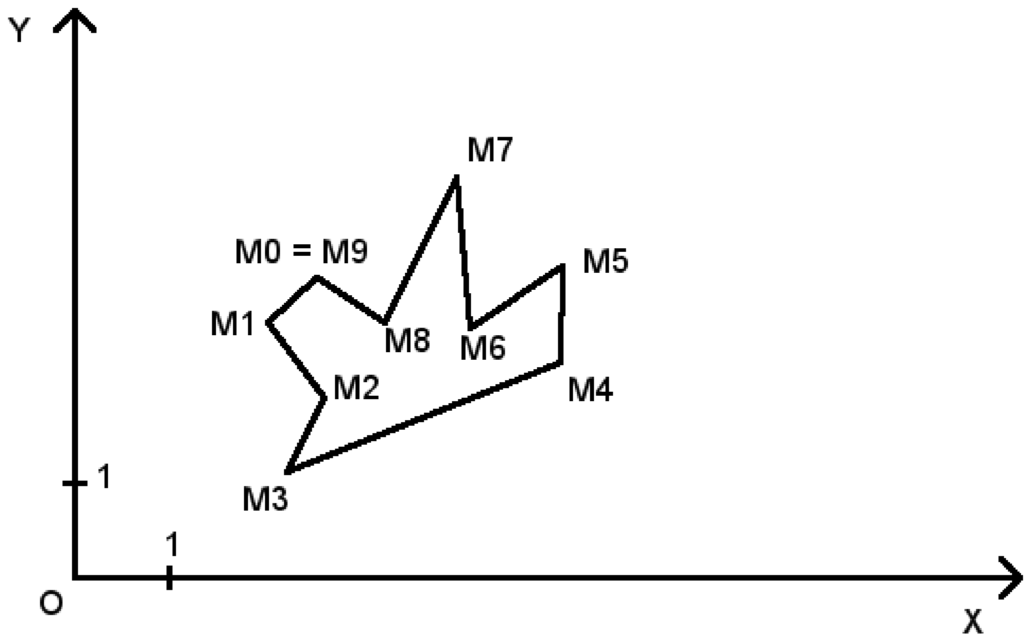
Le centre de gravité G de ces 4 points au sommet du carré est donc le centre du carré de coordonnées G(2,2), représenté ci-dessous.



2 - Centre de gravité d'une surface matérielle délimitée par un polygone

Exemple : une tôle découpée dont le contour est un polygone à n sommets : M0, M1, ... , Mi, ... , Mn = M0.

Dessin pour n = 9 :



Dans ce cas, le poids est réparti sur une infinité de points à l'intérieur du polygone. Dans ce cas, on peut aussi considérer que l'ensemble des forces de pesanteur appliquées sur le morceau de tôle est équivalent à une seule force :

$$P = M \times g$$

où M est la masse totale de la tôle. Cette force est appliquée au centre de gravité G de coordonnées :

$$x_G = \frac{1}{6 \cdot A} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + x_{(i+1)}) \cdot (x_i \cdot y_{(i+1)} - x_{(i+1)} \cdot y_i)$$

et :

$$y_G = \frac{1}{6 \cdot A} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + y_{(i+1)}) \cdot (x_i \cdot y_{(i+1)} - x_{(i+1)} \cdot y_i)$$

où A est l'aire du polygone :

$$A=\sum_{i=0}^{n-1}\left(x_i\cdot y_{(i+1)}-x_{(i+1)}\cdot y_i\right)$$

et où xi est l'abscisse du point Mi et yi est l'ordonnée de ce point (source : Wikipedia).

Exemple numérique :

Calcul des coordonnées xG et yG du centre de gravité de la surface délimitée par le polygone à 6 sommets M0, M1, M2, M3, M4, M5, M6 = M0, avec :

M0(1,1) M1(5,1) M2(4,3) M3(6,6) M4(3,4) M5(0,7)

M6(1,1) = M0

Calcul de l'aire A délimitée par le polygone :

$$A = \sum_{i=0}^{5}[(x_i\times y_{i+1})-(x_{i+1}\times y_i)]$$

soit :

$$\begin{aligned}A = &\frac{1}{2}\times[((x_0\times y_1)-(x_1\times y_0))+((x_1\times y_2)-(x_2\times y_1))]\\ + &\frac{1}{2}\times[((x_2\times y_3)-(x_3\times y_2))+((x_3\times y_4)-(x_4\times y_3))]\\ + &\frac{1}{2}\times[((x_4\times y_5)-(x_5\times y_4))+((x_5\times y_6)-(x_6\times y_5))]\end{aligned}$$

soit numériquement :

$$\begin{aligned}A = &\frac{1}{2}\times[(1\times1)-(5\times1)+(5\times3)-(4\times2)]\\ + &\frac{1}{2}\times[(4\times6)-(6\times3)+(6\times4)-(3\times6)]\\ + &\frac{1}{2}\times[(3\times7)-(0\times4)+(0\times1)-(1\times7)]\\ = &\frac{33}{2} = 16{,}5\end{aligned}$$

Puis :

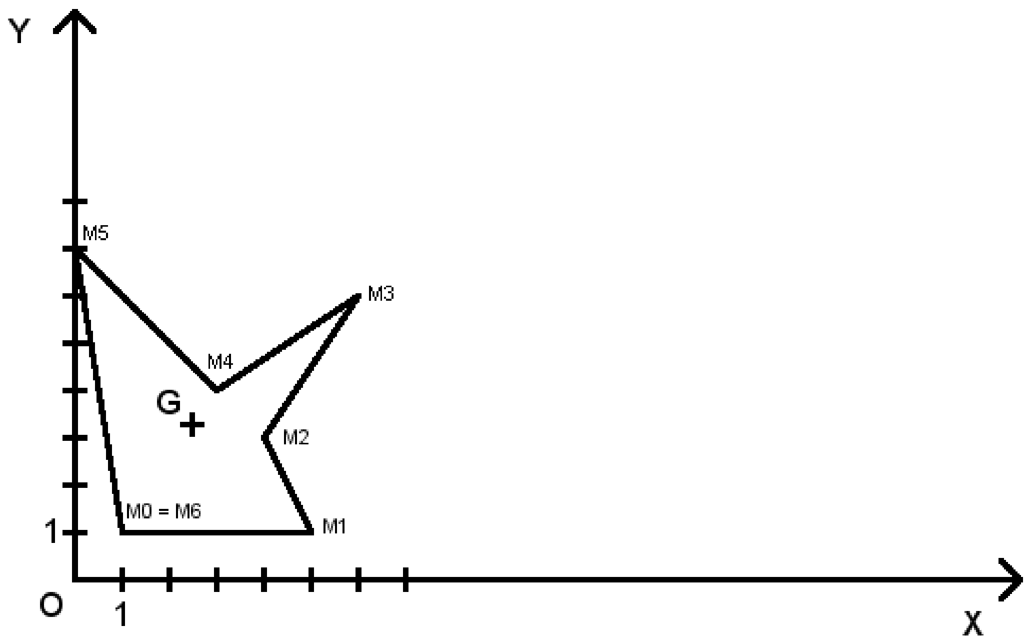
$$x_G=\frac{1}{6\cdot A}\cdot\sum_{i=0}^{8}\left(x_i+x_{(i+1)}\right)\cdot\left(x_i\cdot y_{(i+1)}-x_{(i+1)}\cdot y_i\right)$$

soit numériquement :

$$xG = \frac{245}{99} = 2{,}4747\underline{47}...$$

et de même yG = $\frac{325}{99}$ = 3,2828<u>28</u>...

Ci-dessous, le tracé du polygone et du centre de gravité G de la surface matérielle délimitée par ce polygone.



3 - Calcul des coordonnées du centre de gravité G avec le tableur OpenOffice Calc

a - Cas de masses fixes ponctuelles.

Ceci ne pose pas de difficulté particulière en utilisant les relations du § 1.

b - Cas d'une surface matérielle

On place dans une colonne du tableur les abscisses x1, x2, ... , xi, ... , xn des sommets du polygone. On place dans la colonne voisine les ordonnées y1, y2, ... , yi, ... , yn de ces mêmes sommets.

On calcule l'aire A délimitée par le polygone dans une case du tableur en utilisant la formule 3 du paragraphe 2.

On calcule les coordonnées xG et yG du centre de gravité G dans deux autres cases avec les formules 1 et 2 du paragraphe 2.

Si le polygone possède un nombre n de sommets, il faut ajouter un n+1 ième point pour fermer le polygone.